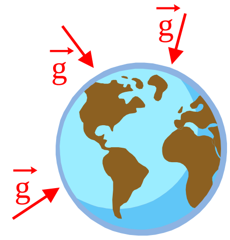
Chapitre 10 : Étude du cas de la chute verticale d'un solide

1. Le champ de pesanteur

On identifie le poids d'un corps, à proximité de la surface de la Terre, à la force de gravitation exercée par la Terre sur la masse m de ce corps : $\vec{F}_G = G.\dfrac{M_T.m}{d^2}.\vec{u}$ où d représente distance (en m) entre le centre d'inertie de la Terre et le centre d'inertie de l'objet et M_T représente la masse (en kg) de la Terre. $\vec{u}$ est un vecteur unitaire ayant pour direction la droite passant par les centres d'inertie de chaque objet et orienté de l'objet vers le centre d'inertie de la Terre.

Le poids d'un corps dépend de la masse de ce corps et de l'action qu'exerce la Terre sur lui : $\vec{P} = m.\vec{g}$, avec $\vec{g}$: champ de pesanteur.



En assimilant la force de gravitation $\vec{F}_G$ et le poids $\vec{P}$ de l'objet, il vient : $m.\vec{g} = G.\dfrac{M_T.m}{d^2}.\vec{u}$,

donc $\vec{g} = \dfrac{G.M_T}{d^2}.\vec{u}$ (on néglige l'interaction avec les autres astres et la rotation de la Terre).

Dans le cas général, la valeur du champ de pesanteur varie avec le lieu : plus on est situé loin du centre de la Terre, plus la valeur du champ de pesanteur diminue ($d = R_T + h$). Par ailleurs, la direction du champ de pesanteur dépend également du lieu où l'on se trouve car ce dernier est radial (sa direction passe par le centre de la Terre).

Cependant on peut considérer pour des distances de l'ordre du kilomètre que le vecteur champ de pesanteur $\vec{g}$ **reste constant** (en direction, sens et valeur !) : on parle alors de **champ de pesanteur uniforme** !

Champ de pesanteur uniforme dans un champ

2. Chute verticale avec frottement fluide

2.1. La poussée d'Archimède

La poussée d'Archimède résulte de forces pressantes s'exerçant sur toute la surface d'un corps en contact avec un fluide. Cette résultante est égale et opposée au poids du fluide déplacé :

$$\vec{F}_A = -\rho_{fluide}.V.\vec{g}$$

Rem. : Le volume V de fluide déplacé est égal au volume du solide totalement immergé.
Rem. : La poussée d'Archimède est une force verticale, orientée vers le haut.

2.2. Les frottements fluides

Lorsqu'un corps solide se déplace dans un fluide, il subit de la part du fluide des forces de frottement appelée forces de frottements fluides qui s'opposent au déplacement du corps. Les forces de frottements fluides possèdent donc même direction que le vecteur-vitesse de l'objet, mais un sens opposé à ce dernier.

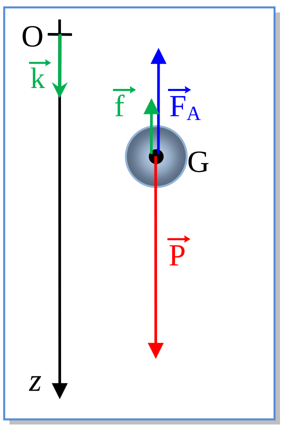
Ces forces sont d'autant plus importantes que la vitesse de l'objet est grande : l'expression des forces de frottements fluides dépend donc de la vitesse de déplacement du solide considéré par rapport au fluide : $f = k.v^n$.

Le coefficient k dépend du fluide (viscosité…) considéré et de la forme du solide.

– Lorsque la vitesse de déplacement est faible (quelques $cm.s^{-1}$), n = 1 ainsi $f = k.v$ (régime laminaire)
– Lorsque la vitesse de déplacement est grande (quelques $m.s^{-1}$), n = 2 ainsi : $f = k.v^2$ (régime turbulent)

2.3. Modélisation du mouvement : application de la seconde loi de Newton

Une bille sphérique de volume V est lâchée dans un fluide de masse volumique ρ_{fluide}. Comment décrire et modéliser son mouvement ?



2.3.1. Système considéré

Le système considéré est {la bille}, dans le référentiel terrestre, supposé galiléen.

2.3.2. Bilan des forces

La {bille} est en interaction avec la Terre et le fluide.

Ces actions mécaniques sont modélisables par des forces :

– Le poids de la bille $\vec{P} = mg.\vec{k}$;
– La poussée d'Archimède $\vec{F}_A = -\rho_{fluide}.V.g.\vec{k}$;
– Les forces de frottements fluide $\vec{f} = -k.v^n.\vec{k}$.

2.3.3. Application de la seconde loi de Newton

D'après la seconde loi de Newton, la résultante de forces extérieures qui s'exerce sur le système et l'accélération que subit son centre d'inertie G sont liées par la relation : $m.\vec{a}_G = \Sigma\vec{F}_{ext}$

$$\text{Ainsi : } m.\vec{a}_G = \vec{P} + \vec{F}_A + \vec{f}.$$

Toutes les forces étant verticales, la modification du mouvement et donc l'accélération sont nécessairement verticales. Ainsi la relation vectorielle peut être projetée sur l'axe vertical :

$$m.a_z = mg - \rho_{fluide}.V.g - k.v_z^n \text{ ou encore : } m.\frac{dv_z}{dt} = mg - \rho_{fluide}.V.g - k.v_z^n$$

$$\frac{dv_z}{dt} = (1 - \frac{\rho_{fluide}.V}{m}).g - \frac{k}{m}.v_z^n$$

On pose $(1 - \frac{\rho_{fluide}.V}{m}).g = A$ et $\frac{k}{m} = B$ ainsi l'équation différentielle devient : $\boxed{\frac{dv_z}{dt} = A - B.v_z^n}$

2.3.4. Vitesse limite

La vitesse de la bille n'augmente pas indéfiniment. En effet, lorsque les forces de frottements deviennent importantes, le solide est soumis à des forces qui se compensent et respecte le principe d'inertie. Ainsi, dans ces conditions, la vitesse ne varie plus et par conséquent $\frac{dv_z}{dt} = 0$. Ainsi : $A - B.v_{z\ell}^n = 0$ et donc $v_{z\ell}^n = \frac{A}{B}$.

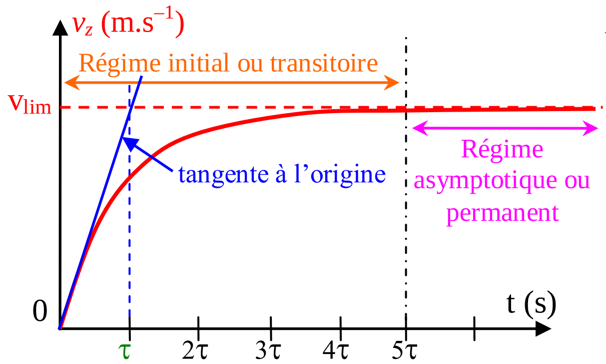
Lors d'une acquisition, on peut mesurer la vitesse limite atteinte et en déduire le coefficient B : $B = \frac{A}{v_{z\ell}^n}$.

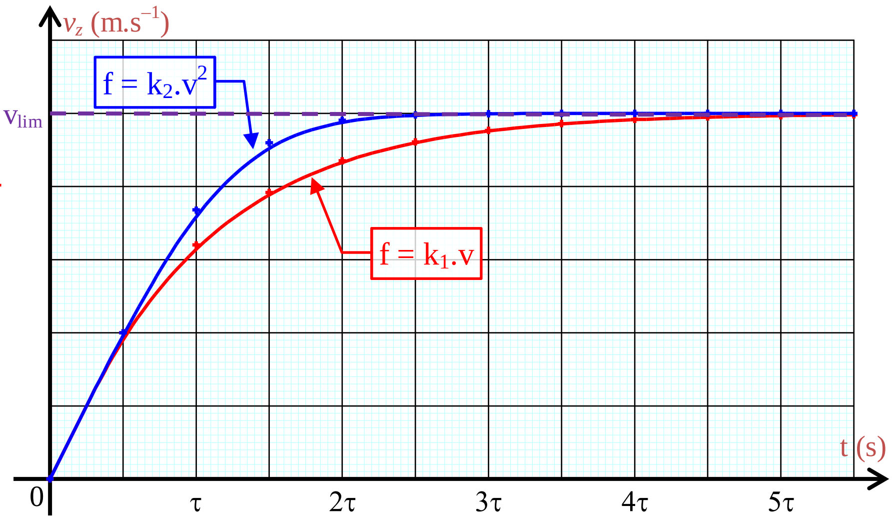
Ainsi l'équation différentielle devient : $\frac{dv_z}{dt} = A - \frac{A}{v_{z\ell}^n}.v_z^n = A.(1 - \frac{v_z^n}{v_{z\ell}^n})$.

Lorsque la vitesse du solide reste faible par rapport au fluide, le régime est qualifié de laminaire (le coefficient n est égal à 1). Au contraire si la vitesse est grande, il se crée des tourbillons, et l'on parle alors de régime turbulent (le coefficient n est égal à 2).

On peut, à l'aide de la méthode d'Euler, estimer quel est le modèle de forces de frottements le mieux adapté : voir le T.P. correspondant !

2.3.5. Temps caractéristique





Le temps caractéristique de l'évolution de la vitesse au cours du temps se note τ. Graphiquement, il se détermine en recherchant l'abscisse du point d'intersection de la droite tangente à la courbe $v_z = f(t)$ à l'origine et de l'asymptote $v = v_{lim}$. On considère qu'au bout de 5τ, le régime initial est terminé et que le régime permanent est atteint, donc que la vitesse reste constamment identique. On remarque, sur le schéma de droite ci-dessus, que ceci est vrai dans le cas d'une évolution exponentielle de la vitesse ($f = k.v$, donc $\frac{dv}{dt}$ dépend linéairement de la vitesse : solution exponentielle) et également dans le cas d'une évolution non exponentielle ($f = k.v^2$).

Simulation : http://pagesperso-orange.fr/gilbert.gastebois/java/euler/euler.htm

3. Chute verticale libre

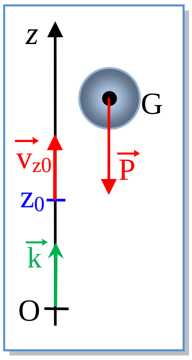
3.1. Pourquoi « libre » ?

Un solide est en chute libre si la seule action mécanique qui s'exerce sur lui est son poids $\vec{P}$.

Rem. : Un objet ne peut être en chute libre que s'il tombe dans le vide. En effet, dans l'air, ou tout autre fluide, l'action mécanique exercée par un fluide sur un solide est modélisable par :

- une force appelée ***poussée d'Archimède*** (négligeable si $\rho_{fluide} << \rho_{solide}$, car la poussée d'Archimède devient alors négligeable devant le poids de l'objet) ;
- des forces de frottement fluide (qui peuvent être négligeable suivant le fluide choisi, la forme du solide utilisé et la hauteur de chute, les frottements fluide dépendant de la vitesse du solide).

3.2. La chute libre



Lors d'une chute libre, par définition : $\Sigma\vec{F}_{ext} = \vec{P}$.

En appliquant la seconde loi de Newton $\Sigma\vec{F}_{ext} = m.\vec{a}$, il vient : $m.\vec{a} = \vec{P}$.

Dans le cas de la chute verticale d'un solide, le mouvement n'a lieu que dans une direction : l'axe Oz vertical. Choisissons un axe Oz orienté vers le haut pour étudier ce mouvement.

$$\vec{a} = a_z.\vec{k} \text{ et } \vec{P} = -P.\vec{k}$$

Ainsi par projections de la seconde loi de Newton sur l'axe Oz, il vient : $m.a_z = -m.g$ donc

$$a_z = -g \text{ (relation 1)}$$

Nous avons vu au précédent chapitre que $\frac{dv_z}{dt} = a_z$, donc la relation 1 conduit à $\frac{dv_z}{dt} = -g$ (relation 2).

L'expression de $v_z(t)$, dont la dérivée temporelle est donnée en relation 2 est donc : $v_z(t) = -g.t + v_{z0}$ (relation 3)

v_{z0} représente la vitesse initiale, que nous supposerons non nulle, à t = 0 (***objet lancé verticalement vers le haut***).

Nous avons vu au précédent chapitre que $\frac{dz}{dt} = v_z$, donc la relation 3 conduit à $z(t) = -\frac{1}{2}.g.t^2 + v_{z0}.t + z_0$ (relation 4).

L'expression liant la position z à l'instant t est appelée équation horaire du mouvement.

À partir des relations 3 et 4, il est possible de déterminer certaines caractéristiques du mouvement :

3.2.1. Quelle est l'altitude maximale atteinte par la bille ?

A l'instant t_1, la bille est au sommet de sa trajectoire, la coordonnée verticale de la vitesse s'annule : $v_z(t_1) = 0$.

Par conséquent : $v_z(t_1) = -g.t_1 + v_{z0} = 0$ soit : $t_1 = \frac{v_{z0}}{g}$.

A l'instant t_1, l'altitude de la bille est : $z(t_1) = -\frac{1}{2}.g.t_1^2 + v_{z0}.t_1 + z_0 = -\frac{1}{2}.g.(\frac{v_{z0}}{g})^2 + v_{z0}.\frac{v_{z0}}{g} + z_0$.

Par conséquent l'altitude maximale atteinte est $z_{max} = z(t_1) = -\frac{1}{2}.\frac{v_{z0}^2}{g} + \frac{v_{z0}^2}{g} + z_0 \Leftrightarrow \boxed{z_{max} = \frac{v_{z0}^2}{2.g} + z_0}$.

3.2.2. Quelle est la durée entre le lancé de la boule et le moment où elle touche le sol ?

A l'instant t_2, la bille touche le sol : son altitude est donc $z(t_2) = 0$.

Par conséquent : $z(t_2) = -\frac{1}{2}.g.t_2^2 + v_{z0}.t_2 + z_0 = 0$.

Il suffit de résoudre l'équation du second degré précédente du type $y(x) = a.x^2 + b.x + c$:

Le discriminant $\Delta = b^2 - 4.a.c$ soit : $\Delta = v_{z0}^2 - 4.(-\frac{1}{2}.g).z_0 = v_{z0}^2 + 2.g.z_0$.

Deux solutions existent : $t_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2.a}$ et $t_2' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2.a}$.

- La première solution est positive car a < 0 alors que b et Δ sont positifs.
- La seconde solution est négative car $\sqrt{\Delta} > b$ donc $\sqrt{\Delta} - b > 0$, or a étant négatif t_2' est négatif : cette solution n'est pas physiquement acceptable.

Ainsi la date t_2 à laquelle la bille touche le sol est : $t_2 = \frac{-v_{z0} - \sqrt{v_{z0}^2 + 2.g.z_0}}{-2.\frac{1}{2}.g} = \frac{v_{z0} + \sqrt{v_{z0}^2 + 2.g.z_0}}{g}$.

La durée du « vol » est donc $\Delta t = t_2 - t_0 = t_2 - 0 \Leftrightarrow \boxed{\Delta t = \frac{v_{z0} + \sqrt{v_{z0}^2 + 2.g.z_0}}{g}}$ ou $\Delta t = \frac{v_{z0}}{g} + \sqrt{\frac{2.z_{max}}{g}}$.

Rem : La durée du vol, et l'altitude maximale atteinte dépendent des ***conditions initiales*** !